1 随机变量

1.1 重要分布

1.1.1 二项分布

二项分布的符号表示为 $X \sim b(n,p)$，其频率函数为：

$$P\{X=x\} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

意为：n 次独立重复试验中，事件 A 发生 x 次的概率。

多项分布：

多项分布的符号表示为 $X \sim m(n, p_1, p_2, \cdots, p_k)$，其频率函数为：

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_k = x_k\} = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} \quad \left(\sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \sum_{i=1}^{k} x_i = n \right)$$

意为：n 次独立重复试验中，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 分别发生 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 次的概率。

1.1.2 泊松分布

泊松分布的符号表示为 $X \sim P(\lambda)$ 或 $X \sim \pi(\lambda)$，其频率函数为：

$$P\{X=x\} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

意为：单位时间（或单位面积）内随机事件发生 x 次的概率。

泊松定理：

设 $X \sim b(n,p)$，当 $n \to \infty, p \to 0$，使得 $np = \lambda$ 不变，则有：

$$\lim_{n \to \infty} P\{X=x\} = \lim_{n \to \infty} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

泊松流：

记在时间 $(0,t]$ 内随机事件发生的次数为 $N(t)$，则 $N(t) \sim P(\lambda t)$，称 $N(t)$ 为泊松流。

$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

1.1.3 均匀分布

均匀分布的符号表示为 $X \sim U(a,b)$，其频率函数为：

$$P\{X=x\} = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其分布函数为：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}$$

1.1.4 正态分布

正态分布的符号表示为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其频率函数为：

$$P\{X=x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

特别的，当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时，称为标准正态分布，记为 $X \sim N(0,1)$。标准正态分布的分布函数记为 $\Phi(x)$，其频率函数记为 $\varphi(x)$。

分布函数的积分过程：

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

此时令 $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则有：

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

规范化： 证明若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$。

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \leqslant z\} \\
&= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant z\right\} \\
&= P\{X \leqslant \sigma z + \mu\} \\
&= F_X(\sigma z + \mu) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

此时令 $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则有：

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \Phi(z)
\end{aligned}
$$

1.1.5 指数分布

指数分布的符号表示为 $X \sim EXP(\lambda)$，其频率函数为：

$$
P\{X = x\} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}
$$

其分布函数为：

$$
F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}
$$

指数分布与泊松流：
设 $N(t)$ 为泊松流，$N(t) \sim P(\lambda t)$。记 X 为第一个事件发生的时间，则 $P\{X > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$。因此 $X \sim EXP(\lambda)$。
指数分布的无记忆性：

设 $X \sim EXP(\lambda)$，则对任意 $s, t > 0$，有：

$$
\begin{aligned}
P\{X > s+t | X > s\} &= \frac{P\{X > s+t, X > s\}}{P\{X > s\}} \\
&= \frac{P\{X > s+t\}}{P\{X > s\}} \\
&= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\
&= e^{-\lambda t} \\
&= P\{X > t\}
\end{aligned}
$$

1.2 频率（密度）函数与分布函数

频率函数的基本性质（本质特征）：

- $P\{X = x\} \geqslant 0$
- $\sum_{x \in X} P\{X = x\} = 1$

满足以上两个性质的数列必定是一个离散型随机变量的频率函数。
密度函数的基本性质（本质特征）：

- $f(x) \geqslant 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1$

满足以上两个性质的函数必定是一个连续型随机变量的密度函数。
分布函数的基本性质（本质特征）：

- $F(x)$ 是一个单调不减函数
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ 是右连续的，即 $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

满足以上三个性质的函数必定是一个随机变量的分布函数。

1.3 分位数

分位数：设 X 是一个连续型随机变量，$F(x)$ 是其分布函数，对于 $0 < p < 1$，若实数 x_p 使得 $F(x_p) = p$，则称 x_p 为 X 的 p 分位数。特殊的，当 $p = 0.5$ 时，称为中位数。当 $p = 0.25$ 时，称为下四分之一位数。当 $p = 0.75$ 时，称为上四分之一位数。

1.4 随机变量的函数的分布

令 $Y=g(X)$，当 Y 是严格单调函数时，有：

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

正态分布的线性组合以及线性函数的分布仍然是正态分布。假设有 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，则有：

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i+b,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\right)$$

1.5 二维随机变量

1.5.1 联合分布函数与边缘分布函数

根据 Farlie-Morgenstern 定理，对于给定的两个一维随机变量 X,Y，可以证明只要 $|a|\leqslant 1$，就有：

$$H(x,y)=F(x)G(y)\{1+a[1-F(x)][1-G(y)]\}$$

是二元连续型分布函数。
换言之，给定边际分布，可以构造出无限多个联合分布。

1.5.2 连接函数

将使得边缘分布为均匀分布的联合分布函数称为连接函数。定义联合分布为：

$$F_{XY}(x,y)=C(F_X(x),F_Y(y))$$

定义密度函数为：

$$f_{XY}(x,y)=c(F_X(x),F_Y(y))f_X(x)f_Y(y)$$

1.5.3 二维正态分布

二维正态分布记为 $X\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，其联合密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

对于其边际分布，有：

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
f_X(x) =&\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \\
=&\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\mathrm{d}y \\
=&\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\cdot \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+p^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right]\right\}\mathrm{d}y \\
=&\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\cdot \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2\right\}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

令 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$，则有：

$$\begin{aligned}
f_X(x) =&\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\cdot \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}t \\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\
=&N(\mu_1,\sigma_1^2)
\end{aligned}$$

注意：边际分布为正态分布时，联合分布不一定为二维正态分布。

1.5.4 二维独立性

设 X,Y 为二维随机变量，若对于任意 x,y，有：

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X,Y 相互独立。
对于离散型随机变量，有：

$$P\{X=x,Y=y\}=P\{X=x\}P\{Y=y\}$$

对于连续型随机变量，有：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

特别的，二维正态分布的独立性等价于 $\rho = 0$。
两组独立的数据 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$，其函数 $h(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 相互独立。

1.5.5 条件分布

设 X, Y 为二维随机变量，$f(x, y)$ 为其联合密度函数，$f_X(x)$ 为 X 的边际密度函数，若 $f_X(x) > 0$，则称：

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

为 Y 在 $X = x$ 的条件密度函数。
二维随机变量的全概率公式：

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

特别的，对于二维正态分布，指定 X 的条件下 Y 的条件分布仍然是正态分布。准确的说，若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则有：

$$f_{Y|X}(y|x) \sim N\left(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right)$$

1.5.6 联合分布随机变量的函数

设 X, Y 为二维随机变量，$Z = f(X, Y)$，则有：

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{f(X, Y) \leqslant z\} = \iint\limits_{f(x,y) \leqslant z} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$Z = X + Y$ 的分布：

$$\begin{aligned} P\{Z \leqslant z\} &= P\{X + Y \leqslant z\} \\ &= P\{X \leqslant z - Y\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \end{aligned}$$

令 $x = u - y$，则有：

$$
\begin{aligned}
P\{Z \leqslant z\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} f(u-y, y) \mathrm{d}u \mathrm{d}y \\
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

特别的，当 X, Y 相互独立时，有：

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y
$$

特别的，当 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$ 时，$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$。
$Z = \frac{X}{Y}$ 的分布：
同理，通过换元法，有：

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(zy, y) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x, xz) \mathrm{d}x
$$

两个随机变量变换的分布：
如果两个随机变量的联合分布为二维正态分布，则他们的非奇异线性变换的分布仍然是二维正态分布。

1.6 极值

$$
\begin{aligned}
F_{\max}(z) &= P\{X \leqslant z, Y \leqslant z\} \\
&= P\{X \leqslant z\} P\{Y \leqslant z\} \\
&= F_X(z) F_Y(z) \\
F_{\min}(z) &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\
&= 1 - P\{X > z\} P\{Y > z\} \\
&= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]
\end{aligned}
$$

特别的，如果 $X \sim EXP(\lambda), Y \sim EXP(\mu)$，则 $Z = \min\{X, Y\} \sim EXP(\lambda + \mu)$。

1.7 顺序统计量

$X_{(k)}$ 的密度函数为：

$$f_{X_{(k)}}(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(x)]^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}f(x)$$

$(X_{(1)},X_{(n)})$ 的联合密度函数为：

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y)=n(n-1)[F(y)-F(x)]^{n-2}f(x)f(y)$$

2 古典概型

2.1 集合

试验的样本点记为 ω，样本空间记为 Ω，样本空间的子集称为事件。
当事件 A 与事件 B 不可能同时发生时，称事件 A 与事件 B 互不相容，或互斥，或互不相交，记为 $A\cap B=\varnothing$。
加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

2.1.1 计数方法

选排列：从 n 个不同元素中任取 m 个元素，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中选取 m 个元素的排列，记为 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$。特别的，当 $m=n$ 时，称为全排列，记为 $A_n^n=n!$。
组合：从 n 个不同元素中任取 m 个元素，不考虑顺序，称为从 n 个不同元素中选取 m 个元素的组合，记为 $C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$。特别的，将 n 个不同元素分成 r 组，使得第 i 组有 n_i 个元素，且 $\sum_{i=1}^r n_i=n$，则称为将 n 个不同元素分成 r 组的组合，记为 $C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$。
将 n 个相同的球放入 m 个不同的盒子中,每个盒子中至少有一个球的方法数为 C_{n-1}^{m-1}。(相当于在 $n-1$ 个间隔中选取 $m-1$ 个间隔放入隔板）将 n 个相同的球放入 m 个不同的盒子中，盒子可以为空的方法数为 C_{n+m-1}^{m-1}。（相当于将 $n+m$ 个相同的球放入 m 个不同的盒子中，每个盒子中至少有一个球）

2.2 全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，即 $B_i \cap B_j = \varnothing(i \neq j), \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，则对任一事件 A，有：

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

贝叶斯公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，即 $B_i \cap B_j = \varnothing(i \neq j), \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，则对任一事件 A，有：

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

2.3 独立性

设 A, B 为两事件，若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立。
独立不同于互不相容，独立是指两事件发生的概率互不影响，互不相容是指两事件不能同时发生。
两两独立不能推出多个事件相互独立。独立也没有传递性，即 A, B 独立，B, C 独立，不能推出 A, C 独立。

3 期望、方差、标准差与相关系数

3.1 常见分布的期望与方差

分布	期望	方差
$X \sim b(n,p)$	np	$np(1-p)$
$X \sim P(\lambda)$	λ	λ
$X \sim U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
$X \sim EXP(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

3.2 期望存在的条件

对于连续型随机变量，当 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\mathrm{d}x < +\infty$ 时，称随机变量 X 的期望存在。
对于离散型随机变量，当 $\sum_{x \in X} |x|P\{X = x\} < +\infty$ 时，称随机变量 X 的期望存在。

3.3 马尔可夫不等式

设 X 是一个非负随机变量，且 $E(X)$ 存在，则对于任意的 $t > 0$，有：

$$P\{X \geqslant t\} \leqslant \frac{E(X)}{t}$$

证明：

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_{t}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_{t}^{+\infty} tf(x)\mathrm{d}x \\
&= t\int_{t}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= tP\{X \geqslant t\}
\end{aligned}$$

3.4 随机变量函数的期望

设 X 是一个随机变量，$Y = g(X)$，则有：

$$E(Y) = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in X} g(x)P\{X = x\}, & X\text{为离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x, & X\text{为连续型} \end{cases}$$

3.5 二维随机变量的期望

设 (X, Y) 是一个二维随机变量，若要求 $E(X), E(Y)$，除了先求边缘分布，再求期望外，还可以通过以下公式求得：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3.6 期望的性质

1. 设 $a < X < b$，则 $a < E(X) < b$
2. $E(cX) = cE(X)$
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4. 当 X, Y 相互独立时，$E(XY) = E(X)E(Y)$

相关推论：

1. 当 $X=c$ 时，$E(X)=c$
2. $E\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n c_iE(X_i)$
3. 当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立时，$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)=\prod_{i=1}^n E(X_i)$

3.7 方差的定义

$$Var(X)=D(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$$

3.8 方差的计算公式

$$Var(X)=D(X)=\begin{cases}\sum_{x\in X}[x-E(X)]^2P\{X=x\}, & X\text{为离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\mathrm{d}x, & X\text{为连续型}\end{cases}$$

但一般使用以下公式计算方差：

$$Var(X)=D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

3.9 方差的基本性质

1. $D(c)=0$
2. $D(cX)=c^2D(X)$
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$，当 X,Y 相互独立时，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$。可以推广到 n 个随机变量的情况：当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立时，$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n D(X_i)$。

3.10 切比雪夫不等式

设 X 是一个随机变量，设 $E(X)$ 和 $D(X)$ 存在，则对于任意的 $\varepsilon>0$，有：

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
P\{|X-E(X)| \geqslant \varepsilon\} &= \int_{|x-E(X)|\geqslant\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{|x-E(X)|\geqslant\varepsilon} \frac{(x-E(X))^2}{\varepsilon^2} f(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{D(X)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

3.11 协方差的定义

$$Cov(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

但一般使用以下公式计算协方差：

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

3.12 协方差的性质

1. $Cov(X,X) = D(X)$
2. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
3. 当 X,Y 相互独立时，$Cov(X,Y) = 0$
4. 协方差的双线性性质：$Cov(aX+bY,Z) = aCov(X,Z)+bCov(Y,Z)$。进一步有，当 $U = a+\sum_{i=1}^{n} b_iX_i, V = c+\sum_{j=1}^{m} d_jY_j$ 时，有 $Cov(U,V) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_id_jCov(X_i,Y_j)$。

3.13 相关系数的定义

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

3.14 相关系数的性质

1. $|\rho_{XY}| \leqslant 1$
2. $|\rho_{XY}| = 1$ 当且仅当存在常数 a,b，使得 $P\{Y = aX+b\} = 1$
3. 当 X,Y 相互独立时，$\rho_{XY} = 0$
4. $\rho_{XY} = \rho_{YX}$

5. $D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2abCov(X,Y)$

需要**强调**的是，相互独立的两个随机变量一定不相关，但不相关的两个随机变量不一定相互独立。但特别的有，当 X,Y 服从二维正态分布时，X,Y 相互独立等价于 $\rho_{XY}=0$，即 X,Y 不相关等价于 X,Y 相互独立。

3.15 条件期望

设 X,Y 是二维随机变量，$E(X)$ 存在，$E(Y)$ 存在，$E(Y|X)$ 存在，则称 $E(Y|X)$ 为 Y 关于 X 的条件期望。
其计算公式为：

$$E(Y|X)=\begin{cases}\sum_{y\in Y} yP\{Y=y|X\}, & Y\text{为离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|X)\mathrm{d}y, & Y\text{为连续型}\end{cases}$$

关于 Y 的函数的条件期望的计算公式为：

$$E[g(Y)|X]=\begin{cases}\sum_{y\in Y} g(y)P\{Y=y|X\}, & Y\text{为离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y|X)\mathrm{d}y, & Y\text{为连续型}\end{cases}$$

3.16 条件期望的性质

1. $E(c|X)=c$
2. $E(aY_1+bY_2|X)=aE(Y_1|X)+bE(Y_2|X)$
3. 若 X 与 Y 相互独立，则 $E(Y|X)=E(Y)$
4. $E(E(Y|X))=E(Y)$
5. $E(D(Y|X))+D(E(Y|X))=D(Y)$

关于性质 4 的证明如下：

$$\begin{aligned}E(E(Y|X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X)f_X(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)\mathrm{d}y\right]f_X(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x)f_X(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y\\ &= E(Y)\end{aligned}$$

4 大数定律与中心极限定理

4.1 大数定律

4.1.1 伯努利大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量，且 $P\{X_i = 1\} = p, P\{X_i = 0\} = 1 - p(i = 1, 2, \cdots, n)$，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，有：

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0$$

4.1.2 切比雪夫大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量，且 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2(i = 1, 2, \cdots, n)$，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，有：

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0$$

注意，此处并不要求 X_i 服从同一分布。

4.2 中心极限定理

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的的随机变量,且 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2(i = 1, 2, \cdots, n)$，则对于任意的 x，有：

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

则 $E(Z_n) = 0, D(Z_n) = 1$。若 $F_n(x)$ 为 Z_n 的分布函数，则有：

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

4.3 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量，且 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2(i = 1, 2, \cdots, n)$，则对于任意的 x，有：

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$$

5 数理统计的基本概念

5.1 总体与样本

一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 作为一个多维随机变量，其联合分布函数为：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n)$$

其联合密度函数为：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

5.2 样本均值与样本方差

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

设总体的均值为 μ，方差为 σ^2，则有：

$$E(\overline{X}) = \mu,\ D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n},\ E(S^2) = \sigma^2$$

5.3 辛钦大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$E(X)$ 存在，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，有：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - E(X)\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0$$

5.4 抽样分布

5.4.1 χ^2 分布

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则有：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

其中 n 称为自由度。

χ^2 分布具有可加性，即若 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，且 χ_1^2 与 χ_2^2 相互独立，则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$。

χ^2 分布的期望和方差为：

$$E(\chi^2) = n,\ D(\chi^2) = 2n$$

特殊的，当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数为 λ 的指数分布的样本，则有：

$$2n\lambda\overline{X} \sim \chi^2(2n)$$

5.4.2 t 分布

设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且 X, Y 相互独立，则有：

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

其中 n 称为自由度。
t 分布的期望和方差为：

$$E(t) = 0,\ D(t) = \frac{n}{n-2}(n > 2)$$

当自由度 n 充分大时，t 分布近似于标准正态分布。

5.4.3 F 分布

设 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$，且 X, Y 相互独立，则有：

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

其中 n_1, n_2 称为自由度。
F 分布的重要性质为：

$$F(n_1, n_2) = \frac{1}{F(n_2, n_1)}$$

由此性质可以推出关于 F 分布的 α 分位点的性质：

$$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$$

5.5 α 分位点

设 X 为连续型随机变量，其分布函数为 $F(x)$，则称 x_α 为 X 的 α 分位点，当且仅当：

$$F(x_\alpha) = \alpha$$

5.6 抽样分布定理

5.6.1 定理一

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则有：

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

5.6.2 定理二

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则有：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立。

5.6.3 定理三

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则有：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

5.6.4 定理四

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 是来自总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 相互独立，则有：

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

5.6.5 定理五

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ 的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 是来自总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 相互独立，则有：

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

其中 $S_\omega^2 = \frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$。

注意，此处不同于定理四，定理四中的两个总体方差可以不相等，而定理五中的两个总体方差相等。

6 参数估计

6.1 点估计

6.1.1 矩估计

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，k 阶原点矩为：

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x$$

一般来说，只需要求出前两阶原点矩，可以由以下公式计算：

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= E(X) \\
\mu_2 &= E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2
\end{aligned}$$

特别的，对于总体为正态分布的情况，有：

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \overline{X} \\
\hat{\sigma}^2 &= \widetilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{S}^2$ 被称为修正样本方差。
通过矩估计法估计参数的步骤为：

1. 写出总体的前 k 阶原点矩 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$。
2. 将未知参数用 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ 表示，得到方程组。
3. 用样本的前 k 阶原点矩 $\overline{X}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \cdots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 代替总体的前 k 阶原点矩 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$，解方程组，得到未知参数的估计量。
4. 将估计量代入总体的分布函数，得到参数的估计值。

6.1.2 极大似然估计

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度函数为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2$
其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 为待估参数，$L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ 为样本的似然函数，定义为：

$$L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

即似然函数代表了该样本出现的概率。

一般需要求出似然函数的对数，即对数似然函数：

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta)$$

由于极大值点与对数似然函数的极大值点相同，因此可以通过求对数似然函数的极大值点来求得参数的估计值。一般通过以下步骤求得参数的极大似然估计值：

1. 写出样本的似然函数 $L(\theta)$。
2. 求出对数似然函数 $\ln L(\theta)$。
3. 求出 $\ln L(\theta)$ 的极大值点，即 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$。
4. 解方程组，得到未知参数的估计量。
5. 将估计量代入总体的分布函数，得到参数的估计值。

特别的，对于均匀分布 $U(a, b)$，其最大似然估计为：

$$\hat{a} = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},\ \hat{b} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

6.2 估计量的评选标准

6.2.1 无偏性

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。若 $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的渐近无偏估计量。若两者都不满足，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的有偏估计量。
无论总体服从什么分布，样本均值 $\overline{X}$ 都是总体均值 μ 的无偏估计量，样本方差 S^2 都是总体方差 σ^2 的无偏估计量。而修正后的样本方差 $\widetilde{S}^2$ 是总体方差 σ^2 的渐进无偏估计量。如果总体的 k 阶原点矩 μ_k 存在，则样本的 k 阶原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 都是总体的 k 阶原点矩 μ_k 的无偏估计量。
重点：当最大似然估计为 max 或 min 时，应这样计算其期望：

$$\begin{aligned} f_{max}(z) =& nf(z)[F(z)]^{n-1} \\ E(\hat{\theta}) =& \int_{-\infty}^{+\infty} zF_{max}(z)\mathrm{d}z \end{aligned}$$

特别的，当整体服从指数分布时，$n * min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 θ 的无偏估计量。

6.2.2 有效性

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1) \leqslant D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

6.2.3 相合性

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_n$ 都是 θ 的无偏估计量，若 $\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geqslant \varepsilon\} = 0$，则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计量。

1. 无论总体服从什么分布，样本均值 $\overline{X}$ 都是总体均值 μ 的相合估计量，样本方差 S^2 都是总体方差 σ^2 的相合估计量。
2. 矩估计一定是相合估计，最大似然估计一般是相合估计。
3. 相合估计不一定时无偏估计。
4. 一个无偏估计，当 $\lim_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n) = 0$ 时，一定是相合估计。(切比雪夫不等式)

6.3 区间估计

6.3.1 置信区间

设总体服从 $F(x;\theta)$，若存在两个统计量 $\overline{\theta}, \underline{\theta}$，使得：

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1 - \alpha$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。
以下为各种情况的总结：

1. 当方差已知时，总体均值的置信区间为：$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < \mu < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$。
2. 当均值和方差都未知时，总体均值的置信区间为：$\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$。
3. 当均值未知时，总体方差的置信区间为：$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$。
4. 当双正态总体的方差都已知时,总体均值之差的置信区间为:$\overline{X} - \overline{Y} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X} - \overline{Y} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$。
5. 当双正态总体的方差未知但相等时,总体均值之差的置信区间为:$\overline{X} - \overline{Y} - t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X} - \overline{Y} + t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$。
6. 当双正态总体的方差未知时，方差之比的置信区间为：$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}$。

单侧置信区间与双侧置信区间类似，以下为各种情况的总结：

1. 当方差和均值都未知时，均值的单侧置信下限为：$\mu > \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)$，均值的单侧置信上限为：$\mu < \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)$。

2. 当方差和均值都未知时，方差的单侧置信下限为：$\sigma^2 > \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$，方差的单侧置信上限为：$\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$。

7 假设检验

建立假设

1. 保护原假设 H_0：如果错误的拒绝原假设，将会产生严重的后果。例如，原假设为新药有毒副作用，备择假设为新药无毒副作用，如果错误的拒绝原假设，将会导致新药上市，从而导致严重的后果。

2. 原假设为维持现状：例如，原假设为新药物有减肥效果，备择假设为新药物无减肥效果。

3. 原假设为简单假设，即原假设中参数的值已知。

7.1 拒绝域

第一类错误：拒绝了正确的原假设，即 H_0 为真，但是拒绝了 H_0。（弃真）第二类错误：接受了错误的原假设，即 H_0 为假，但是接受了 H_0。（取伪）
Neyman-Pearson 准则：在保证第一类错误概率不超过 α 的条件下，使得第二类错误概率最小。其中，α 被称为显著性水平。

7.2 双边 u 检验法

已知 σ_0^2，检验 $H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$。拒绝域为：

$$P\{\frac{|X-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha/2}\} = \alpha$$

7.3 单边 u 检验法

1. 已知 σ_0^2，检验 $H_0: \mu \leqslant \mu_0$，$H_1: \mu > \mu_0$。拒绝域为：$P\{\frac{X-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha}\} = \alpha$

2. 已知 σ_0^2，检验 $H_0: \mu \geqslant \mu_0$，$H_1: \mu < \mu_0$。拒绝域为：$P\{\frac{X-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < u_{\alpha}\} = \alpha$

7.4 双边 t 检验法

未知 σ_0^2 和 μ_0，检验 $H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$。拒绝域为：

$$P\{\frac{|X-\mu_0|}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha/2}(n-1)\} = \alpha$$

7.5 单边 t 检验法

1. 未知 σ_0^2 和 μ_0,检验 $H_0:\mu\leqslant\mu_0$,$H_1:\mu>\mu_0$。拒绝域为:$P\{\frac{X-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\alpha}(n-1)\}=\alpha$
2. 未知 σ_0^2 和 μ_0, 检验 $H_0:\mu\geqslant\mu_0$, $H_1:\mu<\mu_0$。拒绝域为: $P\{\frac{X-\mu_0}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha}(n-1)\}=\alpha$

7.6 双边 χ^2 检验法

1. 未知 σ_0^2 和 μ_0, 检验 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$, $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$。拒绝域为: $P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}+P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}=\alpha$
2. 已知 σ_0^2, 检验 $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$, $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$。拒绝域为: $P\{\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2<\chi^2_{\alpha/2}(n)\}+P\{\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2>\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\}=\alpha$

7.7 单边 χ^2 检验法

1. 未知 σ_0^2 和 μ_0, 检验 $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$, $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$。拒绝域为: $P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}=\alpha$
2. 未知 σ_0^2 和 μ_0,检验 $H_0:\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$,$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$。拒绝域为:$P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha}(n-1)\}=\alpha$
3. 已知 μ_0,未知 σ_0^2,检验 $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$,$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$。拒绝域为:$P\{\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2>\chi^2_{1-\alpha}(n)\}=\alpha$
4. 已知 μ_0,未知 σ_0^2,检验 $H_0:\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$,$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$。拒绝域为:$P\{\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2<\chi^2_{\alpha}(n)\}=\alpha$

7.8 双总体均值差的检验

已知 σ_1^2 和 σ_2^2 时

1. 检验 $H_0:\mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$。拒绝域为: $P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}>u_{1-\alpha/2}\}+P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}<u_{\alpha/2}\}=\alpha$
2. 检验 $H_0:\mu_1\leqslant\mu_2$, $H_1:\mu_1>\mu_2$。拒绝域为: $P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}>u_{1-\alpha}\}=\alpha$
3. 检验 $H_0:\mu_1\geqslant\mu_2$, $H_1:\mu_1<\mu_2$。拒绝域为: $P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}<u_{\alpha}\}=\alpha$

未知 σ_1^2 和 σ_2^2, 但是保证 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时

1. 检验 $H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$。拒绝域为：$P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}>t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}+P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=\alpha$

2. 检验 $H_0:\mu_1\leqslant\mu_2$, $H_1:\mu_1>\mu_2$。拒绝域为: $P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}>t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)\}=\alpha$

3. 检验 $H_0:\mu_1\geqslant\mu_2$, $H_1:\mu_1<\mu_2$。拒绝域为: $P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}<t_{\alpha}(n_1+n_2-2)\}=\alpha$

7.9 双总体方差比的检验

未知 μ_1 和 μ_2 时

1. 检验 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$。拒绝域为: $P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}>F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}+P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}=\alpha$

2. 检验 $H_0:\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$。拒绝域为：$P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}>F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)\}=\alpha$

3. 检验 $H_0:\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$。拒绝域为：$P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}<F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)\}=\alpha$

8 重要的分布及其特征

分布	分布函数	密度函数	期望	方差
$N(\mu,\sigma^2)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
$U(a,b)$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$1-e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$	λ	λ
$B(n,p)$	$\sum_{i=0}^{x}C_n^ip^i(1-p)^{n-i}$	$C_n^xp^x(1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
$\chi^2(n)$	不需记忆	不需记忆	n	$2n$
$t(n)$	不需记忆	不需记忆	$0(n>2)$	$\frac{n}{n-2}(n>2)$
$F(n_1,n_2)$	不需记忆	不需记忆	不需记忆	不需记忆